UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MH-VP-AS-EM-JCV-MOP-SC/mh

Pauta Sumativo 1 Módulo Mod 1 Cálculo Integral. (220132-220168)
06 de Octubre de 2020

RESULTADOS DE APRENDIZAJES	
1.	Aplica la integral de una función de variable real para resolver problemas de Ingeniería.

1. **(20 puntos)**

a) Aproximar , usando diferenciales, el valor de $\arccos 0{,}47$
Solución:
Usamos la función $f(x) = Arccos(x)$ y tomamos $x = 0{,}5$, entonces $dx = -0{,}03$ **(3 puntos)**
$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx = Arccos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **(2 puntos)**
$Arccos(0{,}47) \approx Arccos(0{,}5) - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}}(-0{,}03)$
$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{50}$
$= 1{,}081$ **(5 puntos)**

b) Un cono de base circular recto tiene 12 cm de altura. Si el radio cambia de 6 a 6,04 cm, calcule el cambio aproximado correspondiente al volumen del cono.
Solución:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad h = 12$
$\Rightarrow V = 4\pi r^2, \qquad r = 6, \quad \Delta r = 0{,}04$ **(3 puntos)**
$V(r+\Delta r) - V(r) = V'(r)dr$ **(2 puntos)**
$= 8\pi r dr$
$= 8\pi(6)(0{,}04)$
$= 6{,}032$ **(5 puntos)**

c) Aproximar , usando diferenciales, el valor de $\operatorname{arcsec} 1{,}97$
Solución:
Usamos la función $f(x) = Arcsecx(x)$ y tomamos $x = 2$, entonces $dx = -0{,}03$ **(2 puntos)**
$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx = Arcsec(x) - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ **(3 puntos)**
$Arcsec(1{,}97) \approx Arcsec(2) + \frac{1}{2\sqrt{2^2-1}}(-0{,}03)$
$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{200}$
$= 1{,}038$ **(5 puntos)**

d) Un balón de futbol de diámetro 28 cm. si por el uso, su radio disminuye en 0.6 cm, calcule el cambio aproximado correspondiente al volumen del balón.
Solución:
$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad r = 56, \quad \Delta r = -0{,}6$ **(3 puntos)**
$V(r+\Delta r) - V(r) = V'(r)dr$ **(2 puntos)**
$= 4\pi r^2 dr$
$= 4\pi(14^2)(-0{,}6)$
$= -1477{,}8$ **(5 puntos)**

Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío - 2020

2. **(20 puntos)** Para los siguientes problemas, si x es el numero de bacterias y t es el tiempo transcurrido, existe una constante positiva k tal que, $\dfrac{dx}{dt} = kx$. Resolver

Solución: Parte común para ambos ejercicios

La ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$ puede escribirse como

$$\exists k > 0 : \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} dt = k.$$

Al integrar se obtiene

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} dt = kt + C,$$

donde C es una constante cualquiera.

Entonces, desde la integración $\ln|x| = kt + C$. Como x corresponde a un número de bacterias y supondremos que este número nunca llega a cero, tendremos $x > 0$, Luego, $\ln(x) = kt + C$. De aquí,

$$x = C_1 \cdot e^{kt},$$

donde $C_1 = e^C > 0$ puede verse como una constante positiva cualquiera. **(10 puntos)**

a) Un cierto tipo de bacterias aumenta continuamente en razón proporcional a su número presente. Si en un momento dado hay 2000 presentes y 6 horas más tarde hay presentes 5000, ¿cuántas habrá 12 horas más tarde del momento inicial dado?

Solución:

Sea t_0 un momento dado. (No se pierde generalidad con $t_0 = 0$, pero usaremos t_0 cualquiera.)
Necesitamos saber cuánto es $x(t_0 + 12)$.
Entonces, $x(t_0) = 2000$, es decir, $C_1 \cdot e^{kt_0} = 2000$. **(4 puntos)**
Doce horas más tarde, $x(t_0 + 6) = 5000$, es decir, $C_1 \cdot e^{k(t_0+6)} = 5000$.

De este dato tenemos, $C_1 \cdot e^{kt_0} \cdot e^{6k} = 5000$, es decir, $2000 \cdot e^{6k} = 5000$ y por tanto $e^k = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.
(3 puntos)
Para responder a la pregunta dada desarrollamos

$$\begin{aligned} x(t_0 + 12) &= C_1 \cdot e^{kt_0} \cdot (e^k)^{12} \\ &= 2000 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{12}{6}} \\ &= 2000 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2} \\ &= 12.500 \end{aligned}$$

Doce horas más tarde del momento inicial dado, habrá 12.500 bacterias presentes. **(3 puntos)**

□

b) La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de 5 horas se observa que hay 3600 bacterias presentes. Después de 9 horas hay 6400 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Solución:

En este problema, se pide el valor de $x(0)$.

Nótese que $x(0) = C_1$, por lo tanto *el problema se reduce a buscar* C_1. **(3 puntos)**

Sabemos que después de 5 horas, tenemos que $x(5) = 3600$. De aquí, $C_1 \cdot e^{5k} = 3600$.

Después de 9 horas hay 6400: bacterias. *Lo que no está claro es,* si estas 9 horas son después del inicio, por lo que tendríamos $x(9) = 6400$ o después de las 5 horas mencionadas, por lo que tendríamos $x(14) = 6400$.

Si $x(9) = 6400$, $C_1 \cdot e^{9k} = 6400$. Aprovechamos que $C_1 \cdot e^{5k} = 3600$

y entonces $C_1 \cdot e^{5k} \cdot e^{4k} = 6400$, es decir, $3600 \cdot (e^k)^4 = 6400$. De aquí, $e^k = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Si $x(14) = 6400$, $C_1 \cdot e^{14k} = 6400$. Aprovechamos que $C_1 \cdot e^{5k} = 3600$

y entonces $C_1 \cdot e^{5k} \cdot e^{9k} = 6400$, es decir, $3600 \cdot (e^k)^9 = 6400$. De aquí, $e^k = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{9}}$.

(4 puntos)

Para finalizar, volvemos a usar que $C_1 \cdot e^{5k} = 3600$.

Si $x(9) = 6400$, entonces $e^k = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$. Luego, $C_1 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{5}{4}} = 3600$.

$$\therefore\ C_1 \approx 1753{,}70144266.$$

`Respuesta:` Inicialmente, la población de bacterias es de 1754 aproximadamente, para este caso.

Si $x(14) = 6400$, entonces $e^k = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{9}}$. Luego, $C_1 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{5}{9}} = 3600$.

$$\therefore\ C_1 \approx 2615{,}06014772.$$

`Respuesta:` Inicialmente, la población de bacterias es de 2615 aproximadamente, para este caso.

(3 puntos)

□

3. **(60 puntos)** Determinar las siguientes integrales indefinidas, justificando claramente su respuesta:

A

a) $\int x^3 \cos(x^2+3)\,dx$

Solución:

Usaremos integración por partes, considerando $u = x^2$ y $dv = x\cos(x^2+3)dx$. Entonces, $du = 2xdx$ y $v = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+3)$ (**5puntos**).
Luego,

$$\int x^3\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}(x^2+3) - \int x\operatorname{sen}(x^2+3)dx.$$

(5 puntos)

Por lo tanto,

$$\int x^3\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}(x^2+3) + \frac{1}{2}\cos(x^2+3) + \text{Cte.} \quad (\textbf{5puntos})$$

□

b) $\int \sqrt{\cot x}\csc^4 x\,dx$

Solución:

Hacemos la sustitución simple $u = \cot(x)$. Entonces, $du = -\csc^2(x)dx$ (**5puntos**).
Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\cot(x)}\csc^4(x)dx &= -\int \sqrt{\cot(x)}\csc^2(x)\csc^2(x)dx \\
&= \int \sqrt{\cot(x)}(1+\cot^2(x))\csc^2(x)dx \\
&= -\int \sqrt{u}(1+u^2))du \qquad (\textbf{5puntos}) \\
&= -\int (u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{5}{2}})du \\
&= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \text{Cte.}
\end{aligned}$$

Volvemos a la variable original y tenemos,

$$\int \sqrt{\cot(x)}\csc^4(x)dx = -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}}(x) - \frac{2}{7}\cot^{\frac{7}{2}}(x) + \text{Cte.}(\textbf{5puntos})$$

□

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{10x - x^2 - 29}}\,dx$

Solución:

Nótese que

$$\begin{aligned} 10x - x^2 - 29 &= -(x^2 - 10x) - 29 \\ &= -((x-5)^2 - 25) - 29 \\ &= -(x-5)^2 + 25 - 29 \\ &= -(x-5)^2 - 4 \end{aligned}$$

La expresión $10x - x^2 - 29$ es siempre negativa, no es posible resolver esta integral en $\mathbb{R}$.

□

d) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^3+3x^2-18x}\,dx.$

Solución:

Antes de resolver la integral, factorizaremos el denominador del término a integrar.

$$x^3 + 3x^2 - 18x = x(x^2 + 3x - 18) = x(x+6)(x-3)$$

Descomponemos la expresión a integrar en fracciones parciales

$$\frac{3x^2+1}{x^3+3x^2-18x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+6} + \frac{C}{x-3},$$

donde A, B, C son constantes a ser encontradas
Nótese que

$$\frac{3x^2+1}{x^3+3x^2-18x} = \frac{A(x^2+3x-18) + B(x^2-3x) + C(x^2+6x)}{x^3+3x^2-18x}$$

(2 puntos)

Comparando coeficientes en los numeradores, obtenemos el sistema,

$$A + B + C = 3,\ 3A - 3B + 6C = 0,\ -18A = 1.$$

$A = \frac{1}{18}$. Reemplazando esto en la segunda ecuación, tenemos que $-\frac{1}{6} - 3B + 6C = 0$, es decir, $-18B + 36C = 1$. Reemplazando A en la tercera ecuación se obtiene $-\frac{1}{18} + B + C = 3$, es decir, $18B + 18C = 55$. Eliminamos B y obtenemos $54C = 56$, es decir, $C = \frac{28}{27}$. Ahora, $-18B + \frac{36 \cdot 28}{27} = 1$, es decir, $-18B + \frac{112}{3} = 1$, es decir, $B = \frac{109}{54}$
Luego, $A = -\frac{1}{22}$, $B = \frac{109}{54}$ y $C = \frac{28}{27}$.

(6 puntos)

Por lo tanto

$$\frac{3x^2+1}{x^3+3x^2-18x} = -\frac{3}{11}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{109}{54}\left(\frac{1}{x+6}\right) + \frac{28}{27}\left(\frac{1}{x-3}\right).$$

Así, la integral propuesta es

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+3x^2-18x}dx = -\frac{3}{11}\ln|x| + \frac{109}{54}\ln|x+6| + \frac{28}{27}\ln|x-3| + \text{Cte.}$$

(7 puntos)

□

B

a) $\int x^3 \sin(x^2+1)\,dx$

Solución:

Sea $z = x^2+1 \Rightarrow x^2 = z-1, \quad \frac{dz}{2} = xdx,$ **(3 puntos)**

$\int x^2 \sin(x^2+1)\,xdx = \frac{1}{2}\int (z-1)\sin(z)\,dz$ **(2 puntos)**

Por Integración Partes, sean:

$$\begin{aligned} u = z-1 \quad &, \quad dv = \sin z dz \\ du = dz \quad &, \quad v = -\cos z \end{aligned}$$ **(3 puntos)**

Así, $\frac{1}{2}\int (z-1)\sin(z)\,dz = \frac{1}{2}\left(-(z-1)\cos z + \int \cos(z)\,dz\right) = \frac{1}{2}\left((1-z)\cos z + \sin z\right) + C$ **(5 puntos)**

Por lo tanto, $\int x^2 \sin(x^2+1)\,xdx = \frac{1}{2}\left(-x^2\cos(x^2+1) + \sin(x^2+1)\right) + C$ **(2 puntos)**

.

b) $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$

Solución:

Sea $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\sec^2 x dx = \int \frac{\tan^2 x+1}{\sqrt{\tan x}}\sec^2 x dx$ **(2 puntos)**

Sean, $v = \tan x, \quad dv = \sec^2 x\,dx$ **(2 puntos)**

Reemplazando, se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx &= \int \frac{v^2+1}{\sqrt{v}}\,dv \quad \textbf{(3 puntos)} \\ &= \int (v^{3/2} + v^{-1/2})\,dv \\ &= \frac{2}{5}v^{5/2} + 2v^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{v^5} + 2\sqrt{v} + C \quad \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

Así, $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{tan^5 x} + 2\sqrt{\tan x} + C$ **(3 puntos)**

.

c) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{21+10x+x^2}}\,dx$

Solución:

Sea $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{21+10x+x^2}}\,dx = \int \frac{2}{\sqrt{(x+5)^2-4}}\,dx$ **(2 puntos)**

Sean, $x+5 = 2\sec t, \quad dx = 2\sec t\cdot\tan t\,dt$ **(3 puntos)**

Reemplazando, se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt{21+10x+x^2}}\,dx &= \int \frac{4}{\sqrt{4(\sec^2 t-1)}}\sec t\cdot\tan t\,dt\\ &= \int \frac{4\sec t\cdot\tan t}{2\tan t}\,dt\\ &= 2\int \sec t\,dt\\ &= 2\ln(\sec t+\tan t)+C \quad \textbf{(7 puntos)}\end{aligned}$$

Así, $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{21+10x+x^2}}\,dx = 2\ln(x+5+\sqrt{21+10x+x^2})+C$ **(3 puntos)**

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3-9x^2+20x}\,dx$

Solución:

Por fracciones parciales: $\displaystyle\frac{2x^2+1}{x^3-9x^2+20x} = \frac{2x^2+1}{x(x-4)(x-5)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-5}$ **(2 puntos)**

$A(x-4)(x-5)+Bx(x-5)+Cx(x-4) = 2x^2+1$

$x=0: \quad 20A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{20}$ **(2 puntos)**

$x=4: \quad -4B = 33 \Rightarrow B = \dfrac{-33}{4}$ **(2 puntos)**

$x=5: \quad 5C = 51 \Rightarrow C = \dfrac{51}{5}$ **(2 puntos)**

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^3-9x^2+20x}\,dx &= \int \left(\frac{1/20}{x}-\frac{33/4}{x-4}+\frac{51/5}{x-5}\right)dx\\ &= \frac{1}{20}\ln|x|-\frac{33}{4}\ln|x-4|+\frac{51}{5}\ln|x-5|+C \quad \textbf{(5 puntos)}\end{aligned}$$

Así, $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3-9x^2+20x}\,dx = \frac{1}{20}\ln|x|-\frac{33}{4}\ln|x-4|+\frac{51}{5}\ln|x-5|+C$ **(2 puntos)**